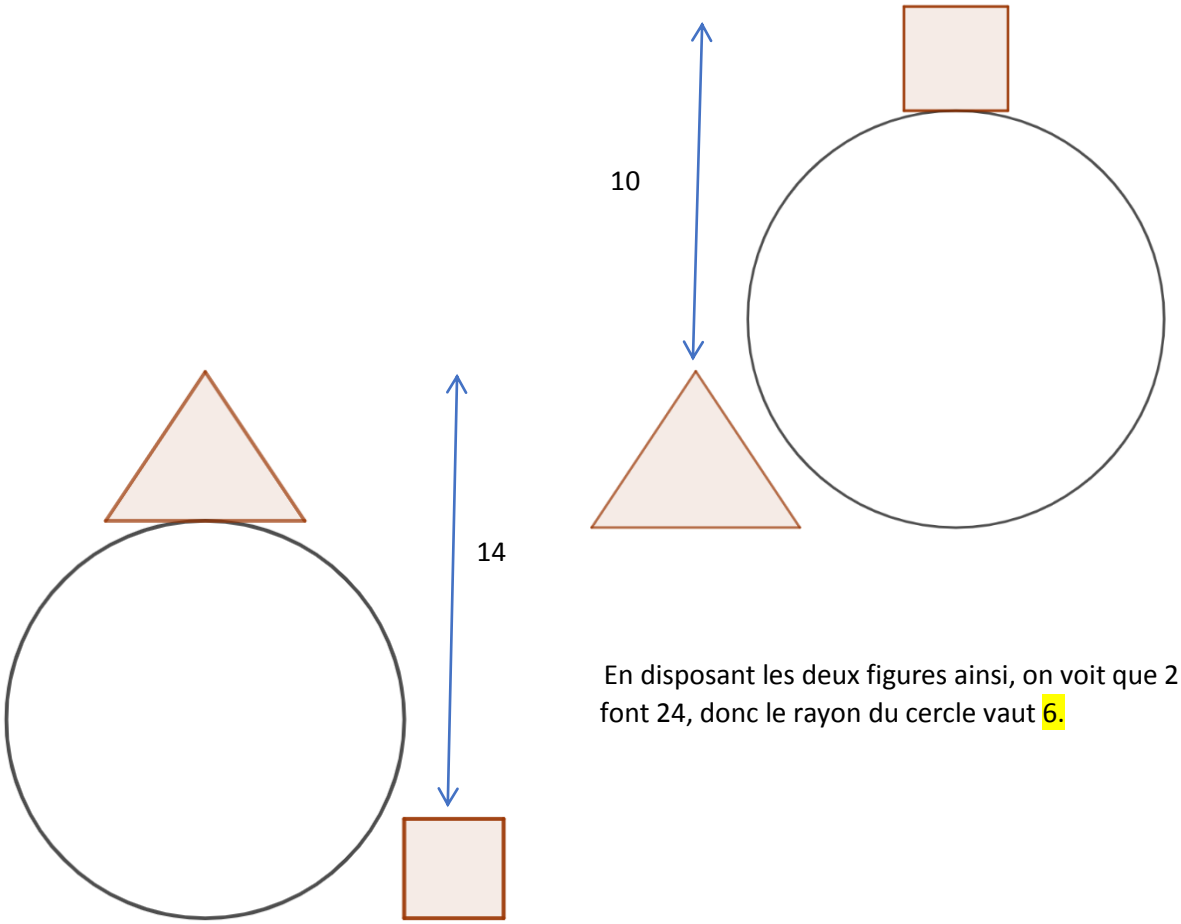
Jeu Enig'maths 2022 corrigé

1. Haut de forme :



En disposant les deux figures ainsi, on voit que 2 diamètres du cercle font 24, donc le rayon du cercle vaut 6.

Ceux qui sont algébristes dans l'âme auront peut-être posé un système d'équations. Si on note r le rayon du cercle, t la hauteur du triangle et c le côté du carré, on a alors les équations :

$$\begin{cases} c + 14 = 2r + t \\ t + 10 = 2r + c \end{cases}$$

En ajoutant membre à membre, on obtient $4r = 24$, d'où $r = 6$.

En revanche, on ne peut pas déterminer les dimensions du carré et du triangle, la seule information que l'on ait à leur sujet est que $t - c = 2$.

2. César et Cléopâtre :

OQP RTGOKGT GUV NG TCRRQTV FG NC EKTEQPHGTGPEG F'WP EGTENG C UQP FKCOGVTG
OQP FGWZKGOG GUV WP FKGW XGPGTG RCT WPG EKXKNKUCVKQP SWK EQPUVTWKUKV DGCWEQWR FG OQP VQWV
OQP VTQKUKGOG GUV WP RTGHKZG UKIPKHKCPV NC OQKVKG
OQP SWCVTKGOG GUV NG UGWN PQODTG RTGOKGT RCKT
OQP VQWV GUV WP RQNAGFTG
Le titre laisse penser que le message a été codé avec un code César, c'est-à-dire en décalant toutes les lettres de l'alphabet d'un certain rang. De plus, une analyse du message crypté montre que la lettre G est la plus fréquente et on le trouve souvent en fin de mot. C'est donc probablement le E. Le décalage est donc de 2 : A→C, B→D, …

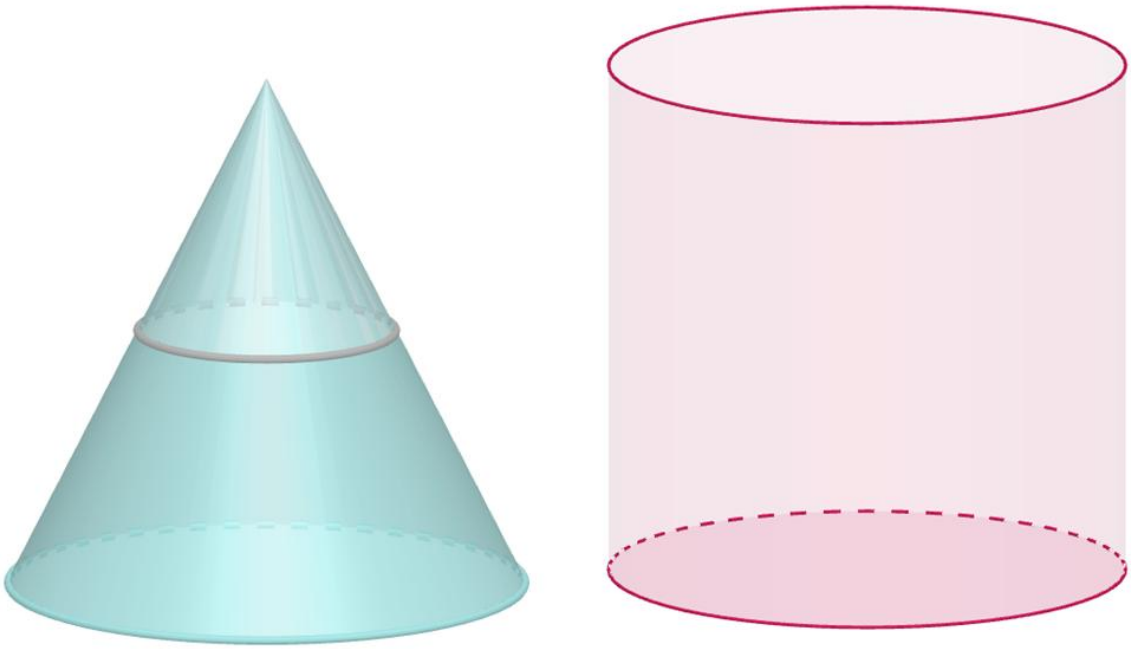
On décrypte ainsi le message :

MON PREMIER EST LE RAPPORT DE LA CIRCONFERENCE D'UN CERCLE A SON DIAMETRE
MON DEUXIEME EST UN DIEU VENERE PAR UNE CIVILISATION QUI CONSTRUISIT BEAUCOUP DE MON TOUT
MON TROISIEME EST UN PREFIXE SIGNIFIANT LA MOITIE
MON QUATRIEME EST LE SEUL NOMBRE PREMIER PAIR
MON TOUT EST UN POLYEDRE

On trouve :
- **Pi** pour mon premier
- **Râ** dieu soleil des Egyptiens pour mon second
- **Mi** pour mon troisième
- **Deux** pour mon dernier
- Mon tout est une **PYRAMIDE** qui a 8 lettres.

Le titre était là comme double indice : comme déjà dit, guider vers le chiffre de César, mais aussi donner une indication sur le mot à trouver avec Cléopâtre. D'autre part ces deux personnages ont été réunis d'assez près comme on peut le savoir en lisant *Astérix* ! Plus sérieusement, l'historien Suétone rapporte dans sa *Vie des douze Césars* que Jules César (le César qui nous intéresse ici) communiquait avec son état-major en utilisant cette méthode de cryptage, d'où son nom. Ce cryptage est évidemment très peu robuste car même sans connaître la clé, une analyse fréquentielle des lettres permet facilement de le craquer. Au pire la méthode de la *force brute* consistant à essayer tous les décalages possibles est aussi envisageable vu le faible nombre de clés possibles (25). Ce système cryptographique rudimentaire est un cas particulier de la méthode de cryptage affine par blocs ; ici les blocs sont de taille 1 puisqu'on crypte lettre par lettre et l'opération sur l'entier modulo 26 représentant la lettre est une simple translation. Les cryptages affines par blocs généraux sont aussi appelés chiffrement de Hill et datent du début du XXe siècle. Là aussi le cas particulier des translations correspond à une méthode due au diplomate Blaise de Vigenère qui au XVIe siècle inventa cette méthode longtemps réputée comme indéchiffrable. Enfin la pyramide est un polyèdre dont toutes les faces, sauf éventuellement une, sont des triangles ayant un sommet commun et la dernière un polygone quelconque. Pour les pyramides égyptiennes cette dernière face, ou base, est un carré.

3. Aurez-vous assez de bouteille ?



Un récipient conique est rempli à mi-hauteur d'eau. On la transvase dans un récipient cylindrique de même base et même hauteur.

Le cône est rempli à mi-hauteur donc le cône qui reste vide a un rayon moitié et une hauteur de moitié par rapport au grand cône donc un volume divisé par 2 x 2 x 2 = 8, par rapport au grand cône. Ainsi le volume d'eau dans le cône représente 7/8 du volume du grand cône.

Le volume du cylindre est le triple de celui du cône et donc l'eau va représenter 7/24 du volume du cylindre et donc monter à 7/24 de la hauteur du cylindre (le volume et la hauteur sont proportionnels dans un cylindre).

4. Des formes encore des formes :

1er jour : ◊

2ème jour : ○

3ème jour : ◊○

4ème jour : ○ ◊○

5ème jour : ◊○ ○ ◊○

…

La solution du jour est le nombre de losanges le 10ème jour.

Chaque jour, chaque losange est remplacé par un cercle et chaque cercle est remplacé par un losange et un cercle.

Le nombre de losanges d'un jour (l_n) est donc la somme du nombre de cercle du jour précédent (c_{n-1}) qui est lui-même égal au nombre de losanges du jour encore avant (l_{n-2}) plus le nombre de cercles (c_{n-2}), soit le nombre de losanges des deux jours précédents : $l_n = c_{n-1} = c_{n-2} + l_{n-2} = l_{n-1} + l_{n-2}$).

On trouve ainsi 21 losanges le 10-ème jour.

Autre façon de voir les choses : chaque jour les formes sont la suite des formes des deux jours précédents donc le nombre de losanges d'un jour est égal à la somme des nombres de losanges des deux jours précédents.

On retrouve la célèbre suite de Fibonacci : 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, … que ce soit pour le nombre de losanges, de cercles ou de formes chaque jour.

5. En forme de calcul :

□ et ○ sont des nombres entiers positifs différents tels que $\frac{1}{\square}+\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}$

La solution du jour est $\square \times \circ$

On sait que $\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$; donc soit $\square < 5$ et $\circ > 5$ ou le contraire.

Supposons par exemple que $\square < 5$ et $\circ > 5$. On a alors 4 nombres entiers possibles pour □ : 1, 2, 3 ou 4.

$\square = 1$ n'est pas possible car $\frac{1}{1} > \frac{2}{5}$.

$\square = 2$ donne $\frac{1}{2}+\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}$ donc $\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}-\frac{1}{2}=\frac{4}{10}-\frac{5}{10}=\frac{-1}{10}$. Impossible.

$\square = 3$ donne $\frac{1}{3}+\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}$ donc $\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}=\frac{6}{15}-\frac{5}{15}=\frac{1}{15}$. Donc $\square = 3$ et $\circ = 15$ est une solution possible.

$\square = 4$ donne $\frac{1}{4}+\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}$ donc $\frac{1}{\circ}=\frac{2}{5}-\frac{1}{4}=\frac{8}{20}-\frac{5}{20}=\frac{3}{20}=\frac{1}{\frac{20}{3}}$. Impossible.

Donc la seule solution est $\square = 3$ et $\circ = 15$ et donc $\square \times \circ = 45$.

On reconnaîtra ici les *fractions égyptiennes*. L'arithmétique égyptienne était fondée sur des multiplications et divisions successives par 2, c'est-à-dire en termes modernes sur une représentation binaire des nombres. Par exemple, pour calculer 48×57 on multiplie 57 par 2 puis le résultat encore par 2 et ainsi de suite tant que la puissance de 2 reste inférieure à 48. On obtient ainsi facilement et successivement $114, 228, 456, 912, 1824$. Le résultat cherché est alors la somme des deux derniers nombres : $1824 + 912 = 2736$, puisque $48 = 2^5 + 2^4$. Pour le calcul sur les fractions, les égyptiens cherchaient à les écrire comme somme de fractions à numérateur égal à 1 et à dénominateurs tous distincts. Ce principe de dédoublement des termes ramène à savoir le faire pour les fractions du type $\frac{2}{n}$ avec n impair. Le papyrus de Rhind présente de telles écritures pour n allant jusqu'à 101. Parmi toutes les écritures possibles les égyptiens privilégiaient celles comportant le moins de fractions, avec une préférence pour les dénominateurs pairs et pas trop grands.

La méthode utilisée ci-dessus pour écrire sous cette forme égyptienne la fraction $\frac{2}{5}$ procède par *disjonctions de cas* ; elle a le double avantage d'être très élémentaire et de prouver l'unicité de la solution.

On peut aussi l'obtenir par « détriplement » de termes de la manière suivante :

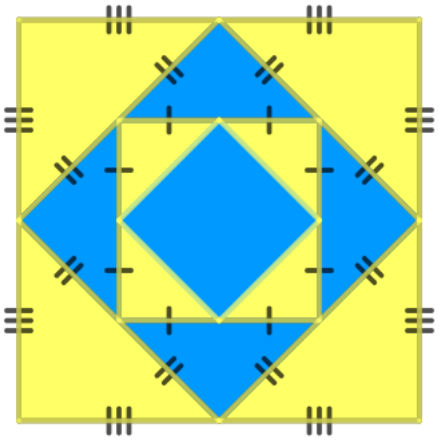
$$\frac{2}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{1}{15}+\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{15}+\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{15}+\frac{5}{15}=\frac{1}{15}+\frac{1}{3}$$

On peut aussi utiliser la formule générale $\frac{1}{a}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a(a+1)}$ qui doublée nous donne

$\frac{2}{a}=\frac{2}{a+1}+\frac{2}{a(a+1)}$, ce qui dans le cas où $a = 5$ nous fournit l'écriture : $\frac{2}{5}=\frac{2}{6}+\frac{2}{30}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$

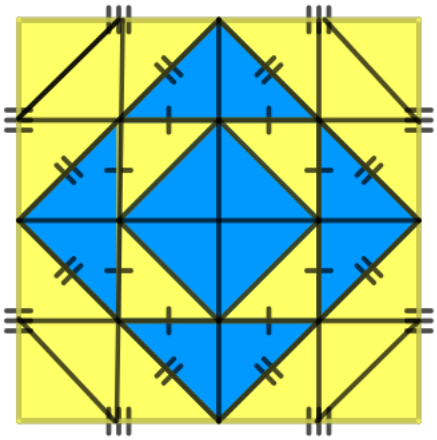
Toutefois, comme cela a été dit plus haut, ces deux dernières méthodes, tout en étant très générales, ne prouvent pas l'unicité de l'écriture avec deux termes, unicité nécessaire pour notre énigme afin qu'il n'y ait pas d'ambiguïté sur le nombre à trouver. Ajoutons pour terminer, car certains d'entre vous ont peut-être procédé ainsi, que la résolution du problème $\frac{2}{n}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{a+b}{ab}$ revient à chercher deux nombres (ici distincts et entiers) dont la somme et le produit vérifient la proportionnalité donnée par la fraction initiale. On est alors conduit à résoudre une équation du second degré…

6. Rapport de formes :



Quelle est la proportion de l'aire du grand carré coloriée en bleu ?

En découpant la figure en petits triangles de même aire, on trouve un rapport de 12/32 soit 3/8 pour l'aire bleue.



7. En forme ?

Dans la grille suivante, colorie toutes les cases dans lesquelles se trouvent des solutions aux énigmes des jours précédents.

Tu trouveras alors une forme mathématique pixellisée dont le nom est aussi une figure de style en littérature, une trajectoire en physique.

π	3	14	1	$\sqrt{25}$	926	25	3	58	$\frac{63}{7}$	7	93	238	462	64	3	38	3
-1	$\sqrt{2}$	0,33	0	2^2	6	$\frac{7}{24}$	2^3	2+6	$\frac{3}{8}$	3+3	$\frac{12}{2}$	$\sqrt{441}$	$\frac{22}{7}$	-12	$\sqrt{7}$	$\frac{\pi}{4}$	0,5
9	18	10^{-1}	7x3	45	10	-5	$\sqrt{3}$	7	i	4	0	$\frac{21}{7}$	8	$\frac{37,5}{100}$	24	-14	43
19	$\frac{1}{3}$	21	22	13	$\frac{5}{7}$	$\sin\frac{\pi}{6}$	37%	$\sqrt{5}$	23	0,66	19	1+1	120	3^2	$\frac{3+4}{6\times 4}$	0,1	100
10^6	360	$\frac{40}{5}$	$\frac{1}{12}$	60	2	-10	2,1	$\frac{25}{12}$	40%	$\ln 2$	-11	200	58	$\frac{63}{7}$	$\sqrt{64}$	1	2%
$\sqrt{1}$	2x4	i	53	3,14	$\sin\frac{\pi}{2}$	15	$\frac{21}{7}$	8x8	18	10%	π	$\ln 1$	2	10^3	100	$\sqrt{36}$	0
10	$\frac{36}{6}$	0	$\frac{\pi}{12}$	462	64	3	90	$\sqrt{5}$	$\cos\frac{\pi}{3}$	150	-13	$\frac{1}{5}$	50	$\frac{21}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{6}{16}$	i
7,5%	3x7	$\frac{1}{2}$	34	66	-5	0	22	9	-5	3,14	3^2	i	4	25%	$\ln 2$	5x9	38
1	$\frac{6+1}{8\times 3}$	30	$\sin\frac{\pi}{6}$	e^3	50%	$\frac{5}{7}$	19	1	95	$\sqrt{3}$	7	99	120	3,14	0	$\frac{18}{3}$	⍰
22	0	$\frac{70}{240}$	$\frac{7}{25}$	3,14	3	$\ln 2$	23	0,66	17	$\frac{1}{3}$	19	$\frac{\pi}{6}$	43	10^6	$\frac{7}{24}$	10	$\sqrt{2}$
13%	π	2^3	34	13	55	0	37	$\sqrt{7}$	23	-5	i	1+1	11	3^2	9x5	$\frac{\pi}{4}$	10%
17	$\sqrt{5}$	$\ln 2$	$\frac{375}{1000}$	6	i	0,1	253	462	365	0	17	0,2	$\frac{16}{2}$	4+4	5	-1	0
34	3,14	2	i	1^2	$\frac{14}{48}$	8	$\frac{90}{2}$	$\frac{3}{8}$	3x2	21	$\frac{90}{15}$	7x$\frac{1}{24}$	-14	26	π	0,1	23
$\frac{1}{3}$	1	10^3	$\frac{\pi}{12}$	2^2	64	$\ln 2$	90	70%	$\cos\frac{\pi}{3}$	0,5	$\sqrt{3}$	i	$\sin\frac{\pi}{6}$	3,14	3	5%	π

C'est une ellipse. Certes elle est pixélisée ! Le mot *ellipse* traduit étymologiquement un manque, une omission. En littérature, c'est une figure de style qui consiste à ne pas tout dire, à laisser le lecteur imaginer ce qui a pu se passer et qui n'a pas été dit. On la retrouve aussi au cinéma. L'ellipse (de la géométrie) fait partie de la grande famille des coniques, définies par les Grecs anciens comme des sections de cône par un plan. Dans cette famille on trouve les paraboles et les hyperboles, autres figures de style aussi ! Les ellipses sont des sortes de cercles un peu écrasés dans une direction. Les trajectoires des planètes autour du soleil suivent de telles courbes comme l'énonça Kepler et le dériva ensuite Newton à partir de la loi de l'attraction universelle.